

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра Статистической физики

Уравнения стохастической динамики в окрестности λ -точки

Выпускная квалификационная работа студента 406
группы

Жаворонкова Юрия Александровича

Научный руководитель:

д.ф. - м.н., профессор НАЛИМОВ М.Ю.

Рецензент:

д.ф. - м.н., профессор АНТОНОВ Н.В.

Санкт-Петербург
2017 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Модель F стохастической динамики	3
3	Модификация модели	5
4	Заключение	12
	Список литературы	13

1 Введение

Настоящая работа посвящена изучению явления Бозе-конденсации. Актуальность данного направления исследования подтверждается многочисленными работами как теоретического, так и экспериментального характера. Ярким примером может служить нобелевская премия, полученная в 2001 году Эриком Корнеллом, Карлом Виманом и Вольфгангом Кеттерле «за достижение конденсации Бозе — Эйнштейна в разреженных газах щелочных металлов и за начальные фундаментальные исследования свойств конденсатов».

Явление Бозе-конденсации, как известно, наблюдается вблизи нулевой температуры, то есть в окрестности λ -точки фазового перехода. На сегодняшний день в большинстве работ, относящихся к данной тематике, используются модели, подразумевающие, что исследуемое вещество представляет собой газ щелочного металла, а не жидкий гелий, как это было ранее. Поэтому видится очевидной необходимость учёта сжимаемости в таких системах.

В работе была предпринята попытка построения модели, способной описывать динамику квантовой жидкости на основе стохастических уравнений типа Ланжевена, приводящих на больших временах к равновесному распределению в рамках критической гидродинамики. В стохастической динамике речь идет о случайных величинах и их статистическом распределении. Стохастичность порождается внутренними причинами — хаотическими соударениями из-за теплового броуновского движения, спонтанным возникновением и взаимодействием вихрей в турбулентном потоке и т.д. Стохастичность моделируется путем включения в уравнения динамики «шума» — случайных сил или других случайных параметров с простым распределением (обычно гауссовым). Распределение задаётся коррелятором шума, который подбирается из физических соображений.

Стандартная задача стохастической динамики формулируется следующим образом:

$$\partial_t \varphi(x) = U(x; \varphi) + \eta(x),$$

$$\langle \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(x') \rangle = D(x, x').$$

Поясним обозначения: $x \equiv (t, \vec{x})$, $\varphi(x)$ — искомое поле (система полей), $U(x; \varphi)$ — заданный t -локальный функционал, не содержащий производных φ по времени, $\hat{\eta}(x)$ — случайная внешняя сила, а $\eta(x)$ — любая конкретная её реализация. Для $\hat{\eta}$ предполагается гауссово распределение с нулевым средним $\langle \hat{\eta}(x) \rangle = 0$. В стандартной постановке задачи также принято считать, что поле (система полей) φ обращается в нуль при $t \rightarrow -\infty$, и при $|x| \rightarrow \infty$.

Важным для нас уравнением является стохастическое уравнение Ланжевена. Стохастическое уравнение Ланжевена описывает простейшие варианты динамики с заданным статистическим действием $S_{st}(\varphi)$ - функционалом от не содержащего времени поля $\varphi(x)$:

$$\partial_t \varphi(x) = \alpha \left[\frac{\delta S_{st}(\varphi)}{\delta \varphi(\vec{x})} \right] \Big|_{\varphi(\vec{x}) \rightarrow \varphi(x)} + \eta(x),$$

$$\langle \hat{\eta}(x) \hat{\eta}(x') \rangle = 2\alpha \delta(x - x').$$

Входящий сюда кинетический коэффициент Онзагера α — не зависящая от $\varphi(x)$ симметричная линейная операция, действующая только на аргумент \vec{x} . Конкретный выбор коррелятора определяется требованием взаимной согласованности динамики и статики.

В результате удалось построить модель, описывающую динамику Бозе-газа вблизи точки фазового перехода с учётом сжимаемости. Фактически построенная модель представляет собой модель квантовой гидродинамики.

2 Модель F стохастической динамики

Традиционное описание критической динамики производится с помощью уравнений Ланжевена, приводящих при больших временах к равновесному распределению Гиббса. Равновесное распределение имеет вид $f \sim e^{S_{st}}$. S_{st} — стационарное действие, вид которого зависит от природы изучаемого явления.

Рассматриваемая модель F стохастической динамики используется для описания критической динамики перехода от нормальной к сверхтекучей жидкости в He_4 . Так же, как и большинство других моделей стохастической динамики, модель F применима и для описания магнетиков.

В качестве стационарного действия для модели F стохастической динамики принимается:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 + mh, \quad (1)$$

где поля ψ, ψ^+ — комплексный параметр порядка (средние бозонных операторов поля $\hat{\psi}, \hat{\psi}^+$), m — линейная комбинация внутренней энергии и плотности, эффективно описывающая флуктуации температуры.

Уравнения Ланжевена модели, в таком случае, известны [1]:

$$\partial_t\psi = \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] + i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_{\psi^+}, \quad (2)$$

$$\partial_tm = -\lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \eta_m, \quad (3)$$

$$\partial_t\psi^+ = \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_{\psi}. \quad (4)$$

Для учёта гидродинамики в исходную модель необходимо добавить максвелловский член $v^2/2$. Сначала приведем модель несжимаемой жидкости ($\partial_i v_i = 0$) [2]. В таком случае S_{st} имеет вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}v^2 + mh, \quad (5)$$

где v — добавленное поле скорости.

Аналогично со случаем модели F без гидродинамических мод можно написать уравнения Ланжевена, соответствующие данному действию:

$$\partial_t\psi + \partial_i(v_i\psi) = \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] + i\lambda g_3\psi[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_{\psi^+}, \quad (6)$$

$$\partial_tm + \partial_i(v_im) = -\lambda u\partial^2[g_2\psi^+\psi - m + h] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \eta_m, \quad (7)$$

$$\partial_t\psi^+ + \partial_i(v_i\psi^+) = \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - i\lambda g_3\psi^+[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_{\psi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_tv &= \nu\partial^2v - \partial_i(v_iv) - \psi^+\partial\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] \\ &\quad - \psi\partial\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - m\partial[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_v. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее ∂ — дифференцирование по пространственной компоненте, ∂^2 — оператор Лапласа.

В уравнениях (6)–(9) возникают члены вида $\partial(v\varphi_a)$, где φ_a — поля m, ψ, ψ^+, v . Отметим, что $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ ввиду равенства нулю ∂v , следующего из того, что жидкость является несжимаемой.

Уравнение (9) является уравнением Навье-Стокса с добавочными членами, необходимыми для существования стационарного предела в модели F.

Известно, что для того, чтобы система уравнений (6)–(9) при больших временах приводила к равновесному распределению $f \sim e^{S_{st}}$, где S_{st} взято из (5), необходимо выполнение уравнения Фоккера-Планка [1]:

$$\partial_t P = -\frac{\delta}{\delta\varphi_a} \left((\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}) \frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b} \frac{\delta}{\delta\varphi_b} \right) P, \quad (10)$$

где P — функция распределения одновременных флуктуаций, $\alpha_{a,b}$ — коэффициенты Онзагера, $\beta_{a,b}$ — коэффициенты межмодовой связи соответствующей пары полей, а φ_a, φ_b — одно из полей m, v, ψ, ψ^+ . Само уравнение (10) возникает из уравнений движения. С учётом того, что для P также должно выполняться $P \sim e^{S_{st}}$, уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_a} \left((\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}) \frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} - \alpha_{a,b} \frac{\delta}{\delta\varphi_b} \right) e^{S_{st}} = 0, \quad (11)$$

Уравнение Фоккера-Планка указывает нам на то, что уравнения Ланжевена являются связанными между собой, что приводит нас к необходимости внесения изменений в одно уравнение при изменении другого.

Из уравнения (11) явно следуют достаточные условия, налагаемые на коэффициенты Онзагера и коэффициенты межмодовой связи:

$$\beta_{ab} = -\beta_{ba}^T, \quad (12)$$

$$\frac{\delta\beta_{ab}(\vec{x}; \varphi)}{\delta\varphi_a(\vec{x})} = 0, \quad (13)$$

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba}^T. \quad (14)$$

Символ транспонирования « T » относится к операциям типа ∂ в коэффициентах α_{ab} и β_{ab} , то есть в целом $\alpha = \alpha^T$, $\beta = -\beta^T$.

Нетрудно заметить, что общий вид уравнения Ланжевена в задачах стохастической динамики имеет вид:

$$\partial_t \varphi_a = (\alpha_{ab} + \beta_{ab}) \frac{\delta S_{st}}{\delta\varphi_b} + \eta_a. \quad (15)$$

Для дальнейших выкладок будет удобно показать справедливость уравнения (11) для этой модели [2]. Итак, покажем как будет записываться уравнение (11) в таком случае:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\psi} \left[-v_i \partial_i \psi + \lambda(1+ib)[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi)\psi}{3} + g_2 m \psi] + i\lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m + h] - \lambda \frac{\delta}{\delta\psi^+} \right] e^{S_{st}} \\ & + \frac{\delta}{\delta\psi^+} \left[-v_i \partial_i \psi^+ + \lambda(1-ib)[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi)\psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] - i\lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m + h] - \lambda \frac{\delta}{\delta\psi} \right] e^{S_{st}} \\ & + \frac{\delta}{\delta m} \left[-\partial_i(v_i m) - \lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] + \lambda u \partial^2 \frac{\delta}{\delta m} \right] e^{S_{st}} \\ & + \frac{\delta}{\delta v} \left[\nu \partial^2 v - \partial_i(v_i v) - \psi^+ \partial [\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi)\psi}{3} + g_2 m \psi] - \psi \partial [\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi)\psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] \right] \end{aligned}$$

$$-m\partial\left[g_2\psi^+\psi - m + h\right] - \nu\partial^2\frac{\delta}{\delta v}\Big]e^{S_{st}} = 0 \quad (16)$$

Удобно записать матрицу коэффициентов Онзагера и матрицу коэффициентов межмодовой связи [4]:

$$\alpha_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda u\partial^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu\partial^2 \end{pmatrix},$$

$$\beta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda b & i\lambda g_3\psi & \psi\partial \\ -i\lambda b & 0 & -i\lambda g_3\psi^+ & \psi^+\partial \\ -i\lambda g_3\psi & i\lambda g_3\psi^+ & 0 & m\partial \\ -\psi\partial & -\psi^+\partial & -m\partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (16) и полученных матриц можно сделать следующие заключения:

1) Члены с множителями β уравнения Фоккера-Планка действительно сокращаются согласно (12).

2) Члены с множителями α , в свою очередь, как видно из уравнения Фоккера-Планка (16), сокращаются с $\delta/\delta\varphi_b$ из (11).

Отдельных комментариев заслуживает тот факт, что в β -матрице равным нулю оказался член β_{vv} . Это объясняется тем, что этот член сокращается сам с собой в уравнении (16), что нетрудно продемонстрировать:

$$-\frac{\delta}{\delta v}[\partial_i(v_i v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v\partial_i(v_i) + v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} = -\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}},$$

Здесь было учтено, что $\partial_i v_i = 0$. Теперь, подействовав вариационной производной на выражения, и учтя, что $e^{S_{st}}$ сокращается всюду в уравнении Фоккера-Планка как множитель, стоящий при каждом из членов, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{\delta v}[v_i\partial_i(v)]e^{S_{st}} &\Rightarrow -[v_i\partial_i] - [v_i\partial_i(v)]v = [\partial_i(v_i)] - [v_i\partial_i(\frac{v^2}{2})] \\ &= -[\partial_i(v_i\frac{v^2}{2})] + [(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)] = 0. \end{aligned}$$

Окончательный результат был получен путём взятия каждого из интегралов по частям. Член $[(\frac{v^2}{2})\partial_i(v_i)]$ оказался равным нулю как интеграл от полной производной при учёте соглашения $v(\infty) = v(-\infty) = 0$.

3 Модификация модели

Для того чтобы определить, каким образом должны измениться уравнения движения, обратимся к стандартному виду уравнения Навье-Стокса [3]:

$$\rho[\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}] = -\text{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3})\text{grad div}(\vec{v}), \quad (17)$$

где η — сдвиговая вязкость, ζ — объёмная вязкость, P — давление, ρ — плотность.

Рассмотрение случая несжимаемой жидкости приводит к необходимости учёта дополнительных членов в уравнении (9).

По аналогии с уравнением Навье-Стокса в уравнении (9) будут присутствовать член с давлением и член с объёмной вязкостью. Их отсутствие ранее объясняется равенством нулю $\text{div}v$, следующим из поперечности поля скорости. Таким образом, в уравнение (9) в

случае сжимаемой жидкости необходимо добавить отсутствовавшие в случае несжимаемой жидкости члены вида:

$$1) \quad \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\eta}{3})\text{graddiv}(\vec{v}), \quad (18)$$

$$2) \quad \frac{1}{\rho}\text{grad}P. \quad (19)$$

Также необходимо учесть и то, что члены вида $\varphi_a \partial_i v_i$ более не являются нулевыми. Это приводит нас к необходимости делать выбор в пользу вида записи в качестве конвективного члена $\partial(v\varphi_a)$ или члена соответствующего переносу поля $v\partial(\varphi_a)$ в уравнениях движения нашей модели. Выбор формы записи будет определяться наличием закона сохранения на то или иное поле.

Рассмотрим как в таком случае будет меняться система уравнений по сравнению с моделью F, в которой поле скорости считается поперечным. Поясним, каким образом осуществлялся выбор вида системы уравнений, а также покажем, что так записанная система обладает стационарным пределом, то есть для неё выполняется уравнение (11).

Сперва стоит пояснить, почему использование модели F с учётом поперечности поля скорости не годится для описания гидродинамики сжимаемой жидкости.

Во-первых, как было указано выше, сама система уравнений (6)–(9) более не является точно определённой ввиду того, что равенство $\partial(v\varphi_a) = v\partial(\varphi_a)$ теперь не выполняется, а следовательно, возникает необходимость в выборе того или иного вида записи этих членов. Этот выбор не является произвольным, из-за того что для одних полей справедливо наличие закона сохранения, а для других — нет. А потому выбор из двух вариантов наиболее простого и удобного невозможен.

Во-вторых, уравнение на поле скорости v в нашем случае необходимо дополнить членами, которые справедливы для уравнения Навье-Стокса, описывающего сжимаемую жидкость. Добавление новых членов в одно из уравнений приведёт к изменению других, связанных с данным, уравнений.

Как будет показано далее, учёт сжимаемости главным образом влияет на вид записи уравнения на поле v .

Итак, начнём с того, что определим, для каких из полей следует писать закон сохранения.

Для полей ψ, ψ^+ как для полей параметра порядка закона сохранения нет, а потому форма записи соответствующих членов выбирается в виде $v_i \partial_i \varphi'$, где φ' поле ψ или ψ^+ .

Поле m есть поле, отвечающее за плотность и внутреннюю энергию. Для него, очевидно, наличие закона сохранения является физически обоснованным. В таком случае необходимо соответствующий член из уравнения на m записывать в виде $\partial_i(mv_i)$.

В уравнении на поле v необходимо использовать член вида $v_i \partial_i v$, так как соответствующая форма записи используется в уравнении Навье-Стокса (17).

Таким образом, по сравнению с моделью [2] мы получили следующие изменения рассматриваемых членов:

$$\begin{aligned} \partial_i(v_i \psi) &\rightarrow v_i \partial_i(\psi), \\ \partial_i(v_i \psi^+) &\rightarrow v_i \partial_i(\psi^+), \\ \partial_i(v_i v) &\rightarrow v_i \partial_i(v). \end{aligned}$$

Для того чтобы написать уравнение на поле скорости v , нужно определиться с тем, как член со второй вязкостью и член с градиентом давления из уравнения (17) будут выглядеть в рамках нашей модели.

В качестве члена, представленного в уравнении (18), будем использовать $\xi \partial_j \partial_i v_i$, здесь $\xi = \frac{1}{\rho}(\zeta + \frac{\eta}{3})$. В свою очередь, член (19) требуется преобразовать таким образом, чтобы он мог быть представлен через используемые в модели поля. Для этого достаточно воспользоваться формулой, связывающей плотность с давлением. Приведем её:

$$c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s,$$

где c — скорость звука. В таком случае (19) можно записать в виде:

$$\frac{c^2}{\rho} \partial_i \rho.$$

Однако известно, что в данной науке оказывается удобно члены в уравнениях Ланжевена представлять в виде $\delta S_{st}/\delta \varphi_a$ с некоторым множителем (даже записывая их иначе такой вид впоследствии будет получен в результате ренормировки), а потому окончательно добавка в уравнение на поле v будет выглядеть:

$$\frac{c^2}{\rho} \partial_i \frac{\delta S_{st}}{\delta m},$$

где

$$\frac{\delta S_{st}}{\delta m} = g_2 \psi^+ \psi - m + h.$$

Выбор $\delta S_{st}/\delta m$ также обусловлен наличием в нём поля m , отвечающего в том числе и за плотность.

Итак, покажем уравнения, полученные на данном этапе:

$$\partial_t \psi + v_i \partial_i(\psi) = \lambda(1 + ib) \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi \right] + i \lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + \eta_{\psi^+}, \quad (20)$$

$$\partial_t m + \partial_i(v_i m) = -\lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + i \lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] + \eta_m, \quad (21)$$

$$\partial_t \psi^+ + v_i \partial_i(\psi^+) = \lambda(1 - ib) \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+ \right] - i \lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + \eta_{\psi}, \quad (22)$$

$$\partial_t v = \nu \partial^2 v + \xi \partial \partial_i v_i - v_i \partial_i(v) - \psi^+ \partial \left[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi \right] \quad (23)$$

$$- \frac{c^2}{\rho} \partial(g_2 \psi^+ \psi - m + h) - \psi \partial \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+ \right] - m \partial [g_2 \psi^+ \psi - m + h] + \eta_v.$$

Однако, как нетрудно видеть, такая система не является системой уравнений Ланжевена с известным статическим пределом. В частности, $v_i \partial_i(v)$, а также $\frac{c^2}{\rho} \partial_i(g_2 \psi^+ \psi - m + h)$ из (23), нарушают выполнение соотношения (11). Также учёт сжимаемости привёл к появлению ещё одного препятствия к получению системы, приводящей к стационарности. Члены уравнения Фоккера-Планка, порождённые $-\psi \partial [\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+]$ из (23) и $v_i \partial_i(\psi)$ из (20), более не сокращают друг друга. Покажем это, воспользовавшись уже известным подходом:

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta}{\delta v_i} \left[\psi \partial \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+ \right] \right] e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta \psi} [v_i \partial_i(\psi)] e^{S_{st}} \\ & = - \left[\psi \partial \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+ \right] \right] \frac{\delta S_{st}}{\delta v_i} e^{S_{st}} - [v_i \partial_i(\psi)] \frac{\delta S_{st}}{\delta \psi} e^{S_{st}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi \partial_i \left[\frac{\delta S_{st}}{\delta \psi} \right] \frac{\delta S_{st}}{\delta v_i} e^{S_{st}} - \partial_i(\psi) \frac{\delta S_{st}}{\delta \psi} \frac{\delta S_{st}}{\delta v_i} e^{S_{st}} \\
&= -\left[\psi \partial [\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] \right] v_i e^{S_{st}} - [v_i \partial_i(\psi)] \left[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+ \right] e^{S_{st}}
\end{aligned}$$

Здесь были подставлены $\partial S_{st}/\partial \psi$ и $\partial S_{st}/\partial v_i$. Очевидно, это равенство выполнялось в случае несжимаемой жидкости, теперь же, ввиду того, что $\partial_i v_i \neq 0$, члены не сокращаются. Для решения данной проблемы было предложено изменить коэффициент межмодовой связи в уравнении на поле v :

$$-\psi \partial \rightarrow -\partial(\psi).$$

Как нетрудно заметить такая замена позволить сократить соответствующие члены в уравнении Фоккера-Планка. Применение аналогичных рассуждений справедливо и для членов $v_i \partial_i(\psi^+)$ из (22) и $-\psi^+ \partial [\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi]$ из (23), поскольку эта пара членов отличается от предыдущей лишь комплексным сопряжением.

Все остальные члены системы уравнений Ланжевена не претерпели изменений, а значит, для них всё ещё справедливыми оказываются выкладки из модели [2]. Можно записать вклад члена $v_i \partial_i(v)$ в уравнение Фоккера-Планка:

$$-\frac{\delta}{\delta v_i} [v_j \partial_j(v_i)] e^{S_{st}} = \delta_{ij} \partial_j(v_i) e^{S_{st}} - \partial_j(v_j) e^{S_{st}} + [v_j \partial_j(v_i)] \frac{\delta S_{st}}{\delta v_i} e^{S_{st}}$$

здесь второе слагаемое было получено путем взятия интеграла по частям. Заметим, что первое и второе слагаемые обнуляются как интегралы от полной производной. Таким образом, следует отдельно рассмотреть третье слагаемое. Для этого учтём, что $\delta S_{st}/\delta v_i = -v_i$:

$$\frac{\delta}{\delta v_i} [v_j \partial_j(v_i)] e^{S_{st}} = -[v_j \partial_j(v_i)] v_i e^{S_{st}} \neq 0. \quad (24)$$

В случае со вторым членом достаточно внести необходимую поправку в уравнение на поле m . Эту поправку можно представить в виде:

$$\frac{c^2}{\rho} \partial_i(v_i).$$

Однако, если учесть тот факт, что ρ не является величиной постоянной, а должно зависеть от поля m , которое, как упоминалось ранее, есть поле, ответственное, в частности, за флуктуации плотности, выясняется, что и такая замена не помогает добиться желаемого результата. Покажем это, выписав соответствующие члены из уравнения Фоккера-Планка:

$$\frac{\delta}{\delta v} \left[\frac{c^2}{\rho} \partial_i(g_2 \psi^+ \psi - m + h) \right] e^{S_{st}} + \frac{\delta}{\delta m} \left[\frac{c^2}{\rho} \partial_i(v_i) \right] e^{S_{st}} \neq 0. \quad (25)$$

Связь ρ с m можно представить в виде:

$$\rho = \rho_\lambda + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \right) m,$$

где $\partial \rho / \partial m$ некоторая постоянная величина, которая может быть приравнена единице путём растяжения полей, а ρ_λ — некоторая постоянная плотность исследуемого флюида вблизи λ -точки.

Итак, мы приходим к выводу, что данная модель всё ещё нуждается в доопределении. Последующие изменения должны быть направлены на устранение упомянутых проблем модели и уже несут искусственный характер.

Для этого было предложено, в первую очередь, внести изменения в вид стационарного действия. Максвелловский член $v^2/2$ из уравнения (5) необходимо заменить на $\rho v^2/2$.

Такая необходимость вызвана тем, что плотность вещества в модели со сжимаемой жидкостью перестаёт быть величиной постоянной, а значит, невозможно добиться равенства её единице путём растяжения, как было сделано в модели [2].

Таким образом, стационарное действие нашей модели приобретает вид:

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \rho\frac{v^2}{2} + mh, \quad (26)$$

Такое изменение моментально приводит к новому виду всей системы уравнений:

$$\partial_t\psi + \rho v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] + i\lambda g_3\psi\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\right] + \eta_{\psi^+}, \quad (27)$$

$$\partial_tm + \partial_i[v_i\rho m] = -\lambda u\partial^2\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\right] + i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] + \frac{c^2}{\rho}\partial_i(v_i) + \eta_m, \quad (28)$$

$$\partial_t\psi^+ + \rho v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - i\lambda g_3\psi^+\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\right] + \eta_{\psi}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \partial_tv &= \nu\partial^2[\rho v] + \zeta\partial\partial_i v_i - \rho v_i\partial_i[v] - \partial(\psi^+)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] \\ &- \frac{c^2}{\rho}\partial(g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}) - \partial(\psi)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - \rho\partial\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\right] + \eta_v. \end{aligned} \quad (30)$$

Как можно заметить, во всех уравнениях системы, как и в S_{st} , появляются члены вида ρv_i , поэтому будет удобно ввести новое поле:

$$p_i \equiv \rho v_i. \quad (31)$$

Введённое поле импульса p_i заменит в нашей системе поле скорости v_i . Такая замена приводит к появлению нового уравнения движения.

При построении уравнения на поле v , мы отталкивались от вида уравнения Навье-Стокса (17), теперь посмотрим, как изменится (17) при замене $p = \rho v$:

$$\partial_tp = -\nabla_i(pv_i) - \text{grad}P + \eta\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\text{graddiv}(\vec{v}). \quad (32)$$

Стационарное действие модели при замене (31):

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \quad (33)$$

Приведём систему уравнений с учётом (31) и (32):

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] \quad (34)$$

$$+ i\lambda g_3\psi\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\right] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] \quad (35)$$

$$-i\lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2}v^2] + \eta_\psi,$$

$$\partial_t m + \partial_i(p_i) = -\lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2}v^2] \quad (36)$$

$$+i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] - c^2 \partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_t p_i = \eta \partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \partial_j \partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+) [\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi] \quad (37)$$

$$- \partial_i(\psi) [\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] - c^2 \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}]$$

$$- \rho \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}] + \eta_p.$$

Для нас оказалось удобным, что $\delta S_{st}/\delta p = -v$, это заметно упростило запись уравнений Ланжевена. Более того, переход к полю импульса позволил нам избавиться от проблемы, возникшей в (28), поскольку $c^2 \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}]$ из (37) не содержит в качестве множителя $1/\rho$, а значит, подобрать компенсирующий его в уравнении Фоккера-Планка член из уравнения на поле m становится нетрудно, и в нашем случае он равен $c^2 \partial_i(v_i)$.

Обратим внимание на уравнение (36). В отличие от (28), где имелся член $\partial_i[v_i \rho m]$ теперь в (36) мы пишем $\partial_i[p_i] \equiv \partial_i[\rho v_i]$. Такое изменение оказалось возможным благодаря тому что, мы фактически перешли от уравнение на m к уравнению на ρ , воспользовавшись тем, как связаны эти величины, а также формой уравнения (28), позволяющей провести такую замену без изменения структуры уравнения.

В результате многочисленных преобразований, в уравнении на поле p у нас появились члены, требующие дополнительного анализа на предмет их влияния на существование стационарного предела. Это члены:

$$c^2 \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \quad (38)$$

$$(\zeta + \frac{\eta}{3}) \partial_i (\partial_j v_j), \quad (39)$$

$$\partial_j(p_i v_j). \quad (40)$$

С влиянием (38) мы разобрались в одном из предыдущих шагов, введя новый член в уравнение на поле m .

Члены (39), (40) стоит обсудить подробнее. Член (39) совместно с $\eta \partial^2 v_i$ можно представить в виде $\alpha(\delta S_{st}/\delta p)$, следовательно, он не влияет на существование стационарного предела.

Член (40) в уравнении Фоккера-Планка частично сокращается благодаря $\partial_i(p_i)$ из (36). Покажем это:

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta}{\delta m} [\partial_i(p_i)] e^{S_{st}} - \frac{\delta}{\delta p_i} [\partial_j(p_i v_j)] e^{S_{st}} = [\partial_i(p_i)] \frac{\delta S_{st}}{\delta m} e^{S_{st}} - [\partial_j(p_i v_j)] \frac{\delta S_{st}}{\delta p_i} e^{S_{st}} \\ & = -[\partial_i(p_i)] [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}] e^{S_{st}} - [\partial_j(p_i v_j)] v_i e^{S_{st}} = -[\partial_i(p_i)] [g_2 \psi^+ \psi - m + h] e^{S_{st}}. \end{aligned} \quad (41)$$

То, что остаётся, должно сокращаться с единственным нерассмотренным членом уравнения (37):

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}], \quad (42)$$

который в уравнении Фоккера-Планка образует слагаемое

$$-\frac{\delta}{\delta p_i} \left[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}] \right] e^{S_{st}}. \quad (43)$$

Очевидно, что для того, чтобы (41) было равно (43), необходимо внести изменение в член (42) из уравнения на поле p . Вместо (42) нам следует писать:

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h]. \quad (44)$$

Тогда (43) переписывается в виде:

$$-\frac{\delta}{\delta p_i} \left[\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h] \right] e^{S_{st}}. \quad (45)$$

Теперь, проинтегрировав (45) по частям, мы получаем то же выражение, что и (46), только с обратным знаком, что и доказывает наличие стационарного предела нашей модели.

Приведём окончательный вид уравнений Ланжевена и S_{st} :

$$S_{st} = -\partial\psi^+\partial\psi - \frac{g_1}{6}(\psi^+\psi)^2 + g_2m\psi^+\psi - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho} + mh, \quad (46)$$

$$\partial_t\psi + v_i\partial_i(\psi) = \lambda(1+ib)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] \quad (47)$$

$$+i\lambda g_3\psi\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\right] + \eta_{\psi^+},$$

$$\partial_t\psi^+ + v_i\partial_i(\psi^+) = \lambda(1-ib)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] \quad (48)$$

$$-i\lambda g_3\psi^+\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\right] + \eta_{\psi},$$

$$\partial_tm + \partial_i(p_i) = -\lambda u\partial^2\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{1}{2}v^2\right] \quad (49)$$

$$+i\lambda g_3[\psi^+\partial^2\psi - \psi\partial^2\psi^+] - c^2\partial_i(v_i) + \eta_m,$$

$$\partial_tp_i = \gamma\partial^2v_i + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\partial_j\partial_iv_i - \partial_j(p_iv_j) - \partial_i(\psi^+)\left[\partial^2\psi - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi}{3} + g_2m\psi\right] \quad (50)$$

$$-\partial_i(\psi)\left[\partial^2\psi^+ - \frac{g_1(\psi^+\psi)\psi^+}{3} + g_2m\psi^+\right] - c^2\partial_i\left[g_2\psi^+\psi - m + h - \frac{v^2}{2}\right]$$

$$-\rho\partial_i[g_2\psi^+\psi - m + h] + \eta_p,$$

где γ — переобозначенная во избежание совпадения со случайной силой η_{φ_a} первая вязкость из уравнения Навье-Стокса.

Как можно заметить, учёт сжимаемости жидкости усложняет вид уравнений Ланжевена по сравнению с моделью, в которой жидкость полагалась несжимаемой.

Приведем формулу:

$$S_{dyn} = \frac{\varphi'_a D_{\varphi_a} \varphi'_a}{2} - \varphi'_a \left(\partial_t \varphi_a + (\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}) \frac{\delta S_{st}}{\delta \varphi_b} \right). \quad (51)$$

С её помощью можно записать динамическое действие нашей модели.

Для случайных сил η_{φ_a} корреляторы представимы в виде:

$$D_{\varphi_a} = \langle \eta_{\varphi_a} \eta_{\varphi_a} \rangle = 2\alpha_{a,a} \delta(t - t') \quad (52)$$

Итак, запишем динамическое действие нашей модели:

$$\begin{aligned} S_{dyn} = & 2\lambda(\psi^+)' \psi' - \lambda u m' \partial^2 m' + p' D_p p' - \psi' \left(-v_i \partial_i(\psi) + \lambda(1+ib)[\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi] \right. \\ & + i\lambda g_3 \psi [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2] \left. \right) - \psi^{+'} \left(-v_i \partial_i(\psi^+) + \lambda(1-ib)[\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] \right. \\ & \left. - i\lambda g_3 \psi^+ [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2] \right) - m' \left(-\partial_i(p_i) - \lambda u \partial^2 [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{1}{2} v^2] \right. \\ & + i\lambda g_3 [\psi^+ \partial^2 \psi - \psi \partial^2 \psi^+] - c^2 \partial_i(v_i) \left. \right) - p' \left(\eta \partial^2 v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \partial_j \partial_i v_i - \partial_j(p_i v_j) - \partial_i(\psi^+) [\partial^2 \psi - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi}{3} + g_2 m \psi] \right. \\ & \left. - \partial_i(\psi) [\partial^2 \psi^+ - \frac{g_1(\psi^+ \psi) \psi^+}{3} + g_2 m \psi^+] - c^2 \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h - \frac{v^2}{2}] - \rho \partial_i [g_2 \psi^+ \psi - m + h] \right) \end{aligned} \quad (53)$$

4 Заключение

В результате проделанной работы удалось написать систему стохастических уравнений Ланжевена с новым физически обоснованным стационарным пределом. Полученная модель является в своём роде аналогом уже известной модели H критической динамики. В отличие от модели H , которая используется для описания поведения классического флюида (в качестве управляющих параметров используются ψ , m , v), наша модель является пригодной для описания квантовой жидкости с учётом сжимаемости.

При детальном рассмотрении полученной системы (47)–(50) становится ясно, что появление члена $\partial_i v_i$ в (49), а также $\partial_i m$ в (50), приводит нас к необходимости дополнительного изучения этих членов в ходе размерного анализа модели, поскольку члены такого вида являются «опасными» в терминологии Васильева.

В настоящей работе был проделан лишь один из этапов изучения модели — её построение. Сравнивая построенную модель с моделью H , можно сказать, что в рамках данной модели ещё предстоит произвести размерный анализ с последующим поиском путей устранения проблем, возникающих при появлении вышеупомянутых членов, и проведение ренормировки, РГ-анализа.

Список литературы

- [1] А.Н. Васильев, Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике.СПб., 1998. С. 545–606
- [2] М. В. Комарова, Д. М. Краснов, М.Ю. Налимов, Бозе-конденсация: критическая размерность вязкости, развитая турбулентность Теорет. Мат. Физ., Том 169, №1, С. 89–99.
- [3] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, Том VI Гидродинамика М. 2006. С. 71–76
- [4] M. Dano, M. Hnatich, M. V. Komarova, D. M. Krasnov, T. Luivjansk, L. Miiin, M. Yu. Nalimov, Influence of hydrodynamic fluctuations on the phase transition in the E and F models of critical dynamics Theor. Math. Phys., 2013, Volume 176, Number 1, Pages 888–897